

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n}$.

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
 - a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$;
 - b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{6n - 2}{3n + 2}$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
 - c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis retrouver le résultat de la question 1.b).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{2}{3 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 2$.
2. a) Exprimer le trinôme $x^2 - 3x + 2$ en produit de facteurs du premier degré.
b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Prouver que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. Exprimer v_n en fonction de n .
5. Exprimer u_n en fonction de v_n puis u_n en fonction de n .

Exercice 3

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 3$.
 - a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
 - c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
 - d) En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
 - e) La conjecture faite dans la question 3 est-elle validée?

Exercice 4

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Détailler les calculs et donner les résultats en écriture fractionnaire.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$: $u_n > 0$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n < u_{n+1}$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit A un nombre réel strictement positif.
L'algorithme ci-dessous permet de calculer et d'afficher le plus petit entier naturel n tel que $u_n > A$.

```
N ← 0
U ← 1
Tant que .....
    U ← .....
    N ← .....
Fin Tant que
Afficher .....
```

- a) Recopier et compléter cet algorithme.
 - b) Écrire cet algorithme en langage Python (écrire une fonction **seuil(A)**).
 - c) Saisir ce programme sur la calculatrice puis l'exécuter pour $A = 115$.
Quel est le résultat obtenu ? Interpréter ce résultat.
5. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 7 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2n - 6$$

6. On se propose de retrouver le résultat de la question précédente par une autre méthode. Pour cela, on considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$v_n = 4u_n - 8n + 24$$

- a) Démontrer, **sans utiliser la question 5**, que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n , puis retrouver le résultat de la question 5.
- 7 a) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = x_n + y_n$$

où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

- b) Pour tout entier naturel n , on considère la somme $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .