

**Exercice 1**

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x}$  et  $g(x) = 2e^x - 1$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère.

1. Démontrer que les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente  $\Delta$  dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_g$  et de la droite  $\Delta$ .  
Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2e^x - 2x - 2$ .
  - a) On note  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .  
Pour tout réel  $x$ , calculer  $h'(x)$  et étudier son signe.
  - b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c) En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $2e^x - 1 \geq 2x + 1$ .
  - d) Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_g$  et de la droite  $\Delta$ ?
3. Étude de la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
  - a) Pour tout réel  $x$ , développer l'expression  $(e^x - 1)^2$ .
  - b) Déterminer la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

**Exercice 2**

**QCM** Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

1. Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'expression  $f(x) = (4x + 1)e^{-x}$ .  
La dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  est définie par :

a)  $f'(x) = 4e^{-x}$

b)  $f'(x) = (3 - 4x)e^{-x}$

c)  $f'(x) = (4x + 5)e^{-x}$

d)  $f'(x) = 3e^{-x} + 4x + 1$

2. L'ensemble des solutions de l'inéquation  $e - e^{-3+0,1x} > 0$  est :

a)  $] -\infty ; 30[$

b)  $] -\infty ; 40[$

c)  $]0,4 ; +\infty[$

d)  $]40 ; +\infty[$

3. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{x+3} - 3e^x$  a le même signe que :

a)  $e^3 - 3$

b)  $e^x - 3$

c)  $e^{x+3}$

d)  $3e^x - 1$

4. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{2x+3} \times e^x$  est égal à :

a)  $(e^{x+1})^3$

b)  $e^{2x^2+3x}$

c)  $e^{3x} + 3e^x$

d)  $e^{2x} \times e^{3x}$

### Exercice 3

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x + x + 1$ .

1. Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  ainsi que ses limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$ .  
En déduire les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$ .  
En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
3. a) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
b) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et de  $T$ .
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Interpréter géométriquement ce résultat.
5. a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

### Exercice 4

#### Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x(1 - x) + 1$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . (on ne demande pas de calculer les limites).
2. a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Démontrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[1 ; 2]$ .  
Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .
3. En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Étudier la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la droite  $(d)$  d'équation  $y = x + 2$ .
4. Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$ .
5. a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $g(x)$ .  
b) Étudier le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  puis dresser son tableau de variation.